Sui problemi futuri della matematica
I 23 problemi

Conferenza tenuta al Congresso Internazionale dei Matematici a Parigi dal 6 al 12 agosto 1900
da David Hilbert[1] (Gottingen)

Chi di noi non sarebbe felice di sollevare il velo dietro il quale si nasconde il futuro per gettare uno sguardo sui progressi della nostra Scienza e sui segreti del suo sviluppo durante i secoli futuri? Nel campo così fecondo e vasto della Scienza Matematica, quali saranno gli obiettivi verso cui si impegneranno le migliori intelligenze matematiche delle generazioni a venire? Quali nuovi metodi e quali nuovi fatti in questo campo ci rivelerà il nuovo secolo?

La storia insegna che lo sviluppo della Scienza è continuo. Noi sappiamo che ogni epoca ha i suoi problemi che l'epoca successiva risolve o spazza via come sterili e sostituisce con altri nuovi. Se vogliamo avere un'idea della probabile evoluzione delle conoscenze matematiche nell'immediato futuro, dobbiamo far scorrere mentalmente le domande rimaste ancora aperte e fermare l'attenzione su quei problemi che la Scienza di oggi pone e per i quali aspettiamo dal futuro la soluzione. Il momento che stiamo vivendo, sulla soglia del ventesimo secolo, mi sembra molto adatto a una tale revisione dei problemi; la chiusura di un'epoca non solo ci invita a guardare indietro nel passato, ma pure indirizza i nostri pensieri verso il futuro ignoto.

È innegabile che alcuni ben determinati problemi abbiano giocato un grande ruolo nel progresso della Scienza Matematica in generale e che essi abbiano avuto una grande influenza sul lavoro del singolo ricercatore. Fintanto che una branca della Scienza offre una grande varietà di problemi, fino ad allora essa è viva; la mancanza di problemi ne prefigura l'estinzione o la cessazione dello sviluppo indipendente. Proprio come ogni impresa umana insegue determinati obiettivi, così anche la ricerca matematica esige i suoi problemi. È nella loro soluzione che il ricercatore si mette alla prova, trova nuovi metodi e nuove prospettive, e conquista un orizzonte più ampio e più libero.

È difficile e spesso impossibile giudicare in anticipo il valore di un problema: il riconoscimento finale dipende dai risultati che la Scienza ne ricava. Tuttavia, ci si può chiedere se esistono criteri generali che individuano un buon problema matematico.

Un vecchio matematico francese disse: "Una teoria matematica non può essere considerata completa finché non la si è chiarita al punto da poterla spiegare alla prima persona che incontrate per strada." Questa chiarezza e facilità di comprensione, qui richiesta con tanta determinazione per una teoria matematica, io la richiederei ancora di più per un problema matematico che voglia essere perfetto: ciò che è chiaro e facile da capire ci attrae, ciò che è complicato ci respinge.

Per attrarci, un problema matematico deve essere difficile, ma non completamente inaccessibile, se non vogliamo che se la rida dei nostri sforzi. Anzi, dovrebbe essere una guida sul cammino intricato che porta a verità nascoste e, alla fine, dovrebbe ricompensare i nostri sforzi con la gioia che ci viene dall'averne trovato una soluzione.

I matematici dei secoli passati si dedicavano alla soluzione di problemi difficili con zelo appassionato. Ne riconoscevano il valore. Vi ricordo solo *il problema della brachistocrona* di Johann Bernoulli. L'esperienza insegna, così si esprime Bernoulli nella pubblicazione di questo problema, che le menti elevate sono spinte a lottare per il progresso della Scienza soprattutto da problemi difficili e allo stesso tempo utili; lui stesso spera dunque di meritare i ringraziamenti del mondo matematico se, seguendo l'esempio di uomini come Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani e altri ancora, sottopone agli analisti illustri del suo tempo un problema con cui possono, come con

[1] Il discorso originale "Mathematische Probleme" è apparso in *Göttinger Nachrichten*, 1900, pp. 253-297, e in *Archiv der Mathematik und Physik*, (3) 1 (1901), 44-63 e 213-237. [Il titolo completo del giornale *Göttinger Nachrichten* è *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen*]. La traduzione qui presentata è stata condotta a partire dalla versione comparsa nel 1902 nel *Compte rendu du deuxième Congrès International des Mathematiques tenu à Paris du 6 au 12 août* pubblicato da Gauthier-Villars. (cfr. D. Hilbert, *Sur les Problèmes futurs des Mathématiques. Le 23 problèmes,* Éditions Jacques Gabay, 1990, Sceaux).

una pietra di paragone, verificare il valore dei loro metodi e misurare la loro forza. Il calcolo delle variazioni deve la sua origine a questo problema di Bernoulli e a problemi analoghi.

Fermat aveva affermato, come è noto, che l'equazione diofantea

$$x^n + y^n = z^n$$

(x, y e z numeri interi) è irrisolvibile, tranne che per alcuni casi evidenti. Il *Problema di dimostrare questa impossibilità* ci offre un esempio straordinario di come un problema così particolare e apparentemente poco importante possa essere d'ispirazione e avere conseguenze nella Scienza. È infatti il problema di Fermat che ha portato Kummer a introdurre il concetto di numero ideale e a scoprire l'unicità della scomposizione in fattori primi ideali degli elementi di un corpo ciclotomico – teorema che oggi, nella sua generalizzazione a tutti i campi algebrici operata da Dedekind e Kronecker, è diventato il fatto centrale della moderna teoria dei numeri e la cui importanza si estende all'Algebra e alla Teoria delle funzioni, ben oltre i confini della Teoria dei Numeri.

Passando a un settore molto diverso della ricerca, vi ricordo il *Problema dei tre corpi*. Poincaré, nel tentativo di riprendere da capo questo difficile problema e di avvicinarsi a una sua soluzione, ha scoperto metodi fecondi e principi di vasta portata in Meccanica celeste, che oggi sono riconosciuti e applicati anche nella pratica dell'Astronomia.

Questi due problemi - quello di Fermat e quello dei tre corpi - ci sembra quasi che occupino due poli opposti nell'insieme dei problemi: il primo, libera invenzione della pura ragione, il secondo, posto dagli astronomi e necessario per la comprensione dei più semplici fenomeni fondamentali della natura.

Spesso accade anche che lo stesso problema particolare trovi applicazione nei settori più diversi della conoscenza matematica. Così, per esempio, il *Problema delle geodetiche* svolge un ruolo importante e storicamente significativo nei fondamenti della Geometria, nella teoria delle curve e delle superfici, in meccanica e nel calcolo delle variazioni. Sullo stesso fronte, nel suo libro sull'*Icosaedro*, F. Klein ha mostrato molto bene il peso che il *Problema dei poliedri regolari* ha nella Geometria elementare, nella teoria dei gruppi e delle equazioni, e nella teoria delle equazioni differenziali lineari.

Per mettere in luce l'importanza di certi problemi, ricorderò che Weierstrass considerava un dono della Provvidenza l'aver incontrato, agli inizi della carriera scientifica, un problema a cui lavorare talmente importante come il *Problema di inversione di Jacobi*.

Avendo ricordato l'importanza in generale dei problemi in Matematica, passo a cercare di capire da dove questa Scienza li tragga. Sicuramente, in ogni ramo della Matematica, i primi e più antichi problemi scaturiscono dall'esperienza e sono suggeriti dal mondo dei fenomeni esterni. Anche le regole delle *operazioni sui numeri interi* sono state scoperte in questo modo fin dai primi momenti della civiltà umana, in modo del tutto simile a come ancora oggi il bambino impara l'applicazione di queste leggi in modo empirico. Lo stesso vale per *i primi problemi di Geometria*: problemi posti nell'antichità, come la duplicazione del cubo, la quadratura del cerchio; ma anche i problemi che si sono presentati per primi nella teoria della risoluzione delle equazioni numeriche, nella teoria delle curve e del calcolo differenziale e integrale, nel calcolo delle variazioni, nella teoria delle serie di Fourier e nella teoria del potenziale - per non parlare dell'abbondanza e della ricchezza dei problemi della Meccanica, dell'Astronomia e della Fisica.

Ma, nello sviluppo di un ramo della matematica, la mente umana, incoraggiata dal successo delle soluzioni che ha trovato, prende coscienza della propria indipendenza. Crea da se stessa problemi nuovi e fecondi, nella maniera più felice, spesso senza un'influenza dall'esterno apprezzabile, soltanto per associazione logica, per generalizzazione e particolarizzazione, separando e di nuovo riunendo idee. È lei stessa a porre le nuove domande.

È così che sono nati il *Problema dei numeri primi* e gli altri problemi della teoria dei numeri, la teoria di Galois delle equazioni, la teoria degli invarianti algebrici, quella delle funzioni abeliane e automorfe; in realtà *quasi tutte le questioni più delicate delle teorie moderne dei numeri e delle funzioni* sono nate in questo modo.

Nello stesso tempo, mentre il potere creativo della pura ragione è al lavoro, il mondo esterno fa sentire di nuovo la sua influenza, ci impone nuove domande nate dall'esperienza reale, apre nuovi campi della Matematica; allora, mentre cerchiamo di far rientrare nuovi settori della conoscenza nel regno del puro pensiero, troviamo spesso la risposta a vecchi problemi irrisolti e quindi, contemporaneamente, facciamo progredire di molto le vecchie teorie. E mi sembra che sia proprio su questi scambi ricorrenti tra pensiero ed esperienza che si appoggiano le numerose e sorprendenti analogie, e quell'armonia apparentemente prestabilita, che il matematico così spesso percepisce nelle domande, nei metodi e nelle idee dei vari rami della sua Scienza.

Esaminiamo ora brevemente quali requisiti generali deve avere la soluzione di un problema matematico. Come prima cosa, io metterei la correttezza della soluzione che deve essere ottenuta per mezzo di un numero finito di passaggi e che deve basarsi su un numero finito di ipotesi contenute nella formulazione del problema ed espresse sempre con precisione. Questa deduzione logica attraverso un numero finito di operazioni esprime semplicemente l'esigenza di rigore nel ragionamento. Infatti l'esigenza di rigore, che è diventata oggi di un'importanza proverbiale in Matematica, corrisponde a una necessità filosofica universale della nostra comprensione; e, d'altra parte, è solo se questo bisogno viene soddisfatto che i problemi mostrano la loro fecondità e la loro portata. Un nuovo problema, soprattutto quando viene dal mondo dell'esperienza esterna, è come un giovane ramoscello, che cresce e porta frutto solo quando viene innestato, con tutte le cure previste dall'arte del giardiniere, sul tronco vecchio, cioè sulle conoscenze matematiche che già possediamo.

Del resto, sarebbe un errore credere che il rigore nella dimostrazione sia nemico della semplicità. Al contrario, molti esempi mostrano che il metodo più rigoroso è anche il più semplice e più facile da comprendere. Proprio lo sforzo per raggiungere il rigore ci costringe sempre a trovare dimostrazioni più semplici e spesso apre la strada a metodi più fecondi rispetto ai vecchi metodi che erano meno rigorosi. Così la teoria delle curve algebriche ha subito delle semplificazioni incontestabili e ha raggiunto una maggiore unità grazie ai metodi più rigorosi della teoria delle funzioni e all'introduzione di considerazioni trascendenti ausiliarie. E ancora, la dimostrazione che è possibile applicare le quattro operazioni aritmetiche elementari alle serie di potenze nonché differenziarle e integrarle termine a termine, ha semplificato tutta l'Analisi. E in particolare ciò vale per la teoria dell'eliminazione, per quella delle equazioni differenziali e per i teoremi di esistenza contenuti in quest'ultima. Ma l'esempio più eclatante a favore di quanto sto dicendo è il Calcolo delle variazioni. Affrontare la prima e la seconda variazione degli integrali definiti richiedeva calcoli estremamente complessi, e i metodi utilizzati dagli antichi matematici mancavano a questo proposito del rigore necessario. È Weierstrass colui che, per primo, ci ha mostrato la via verso un nuovo e sicuro fondamento del Calcolo delle variazioni. Al termine di questa conferenza, mostrerò brevemente, prendendo come esempi l'integrale semplice e l'integrale doppio, come, seguendo la strada aperta da Weierstrass, si semplifichi in maniera sorprendente il Calcolo delle variazioni. Farò vedere che, nella dimostrazione delle condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un massimo o di un minimo, il calcolo della variazione seconda e una parte dei faticosi ragionamenti relativi alla prima variazione sono del tutto superflui, per non parlare del grande progresso che è legato all'eliminazione della restrizione a variazioni tali che le derivate delle funzioni varino di poco.

Pur insistendo sul rigore nella dimostrazione come una necessità per la soluzione completa di un problema, vorrei, d'altra parte, contrastare il parere secondo il quale solo i concetti dell'Analisi, o anche solo quelli dell'Aritmetica, sono suscettibili di una trattazione del tutto rigorosa. Io ritengo totalmente sbagliata questa opinione, sostenuta di tanto in tanto da uomini eminenti.

Una concezione così restrittiva di rigore avrebbe presto portato ad ignorare tutti i concetti derivanti dalla Geometria, dalla Meccanica e dalla Fisica; sbarrerebbe la via a tutto ciò che viene dal mondo esterno, e infine, come ultima conseguenza, porterebbe al rifiuto delle idee di continuo e di numero irrazionale. Quale fonte vitale per la Scienza Matematica sarebbe chiusa con la soppressione della Geometria e della Fisica matematica! Al contrario, io penso che ovunque nascano idee matematiche, sia in Filosofia (dalla teoria della conoscenza) che in Geometria e in Fisica, subito sorge il problema dei principi alla base di queste idee e di come fondarli su un sistema semplice e completo di assiomi, così che l'esattezza delle nuove idee e la loro applicabilità nulla abbiano da invidiare alle classiche definizioni dell'Aritmetica.

A nuovi concetti corrispondono, necessariamente, nuovi simboli; dobbiamo scegliere questi ultimi in modo tale che ci ricordino i fenomeni che sono stati all'origine dei nuovi concetti. Così le figure geometriche sono simboli che ci ricordano l'intuizione dello spazio ed è così che ogni matematico le usa. Chi non usa insieme alla doppia disuguaglianza $a > b > c$ l'immagine di tre punti uno dopo l'altro su una retta come rappresentazione geometrica del termine "fra"? Chi non fa uso di disegni di segmenti e di rettangoli racchiusi uno dentro l'altro, quando si tratta di dimostrare in maniera rigorosa un difficile teorema sulla continuità delle funzioni o sull'esistenza di punti di accumulazione? Chi potrebbe fare a meno della figura del triangolo, del cerchio con il suo centro, o della figura formata da tre assi perpendicolari? E chi rinuncerebbe alla rappresentazione dei vettori, o ai disegni di famiglie di curve o superfici con i loro inviluppi, immagini che giocano un ruolo così importante in Geometria, nei fondamenti del Calcolo delle variazioni e in altre branche della Matematica pura?

I segni e i simboli dell'Aritmetica sono figure e le figure geometriche sono formule disegnate; nessun matematico potrebbe fare a meno di queste formule disegnate più di quanto potrebbe fare a meno, nei calcoli, delle parentesi o di altri simboli analitici.

L'uso dei simboli geometrici per una dimostrazione rigorosa presuppone l'esatta conoscenza e la padronanza completa degli assiomi che stanno alla base di quelle figure; affinché queste figure geometriche possano essere incorporate nel tesoro comune dei segni matematici, è necessaria un'indagine assiomatica rigorosa del loro contenuto intuitivo. Proprio come sommando due numeri, uno deve mettere le cifre una sotto l'altra nel giusto ordine e applicare correttamente le regole di calcolo, cioè gli assiomi dell'Aritmetica, così le operazioni sui simboli geometrici devono essere determinate per mezzo degli assiomi della Geometria e delle loro combinazioni.

L'accordo tra il pensiero geometrico e quello aritmetico è mostrato anche da questo: nelle ricerche aritmetiche, così come nelle considerazioni geometriche, di solito non ripercorriamo a ritroso ogni passo della catena del ragionamento fino agli assiomi. Anzi, in particolare nel primo approccio a un problema aritmetico (ma è lo stesso per un problema geometrico), usiamo una successione di ragionamenti rapida, inconsapevole, non ancora definitiva, con una fiducia assoluta in una certa sensibilità aritmetica e nell'efficacia dei simboli aritmetici; senza questa fiducia non potremmo progredire in Aritmetica più di quanto potremmo farlo in Geometria se non sapessimo vedere nello spazio. Come esempio di una teoria aritmetica che opera in modo rigoroso con idee e simboli geometrici, posso citare il lavoro di Minkowski, *Die Geometrie der Zahlen*[2].

Alcune osservazioni sulle difficoltà che i problemi matematici possono offrire, e sui mezzi per superarle, possono trovare posto qui in modo naturale.

Se non riusciamo a risolvere un problema matematico, spesso il motivo sta nella nostra incapacità a individuare il punto di vista più generale da cui il problema che abbiamo di fronte appare solo come anello di una catena di problemi collegati tra loro. Dopo aver individuato questo punto di vista, non solo il problema diventa più accessibile alla nostra indagine, ma, di più, entriamo in possesso di un metodo che è applicabile anche ad altri problemi dello stesso tipo. Cito, come esempi, l'introduzione fatta da Cauchy dei cammini complessi di integrazione e, nella teoria dei numeri, l'introduzione del concetto di numeri ideali da parte di Kummer. Questo modo di trovare metodi generali è senza dubbio il più accessibile e il più sicuro. Chi cercherà metodi senza avere in mente un problema preciso in generale cercherà invano.

Nell'affrontare problemi matematici, la specializzazione gioca, io credo, un ruolo più importante della generalizzazione. Forse in molti casi in cui si cerca invano la risposta a una domanda, la causa del fallimento sta nel fatto che i problemi più semplici e più facili di quello che si sta affrontando non sono stati risolti del tutto o non completamente. Tutto sta, dunque, nel trovare questi problemi più facili e nel risolverli per mezzo di metodi il più completi possibile e di concetti che possano essere generalizzati. Questa norma è uno degli espedienti più importanti per superare le difficoltà in matematica e mi sembra che sia utilizzata quasi sempre, anche inconsapevolmente.

A volte capita che si cerchi una soluzione sotto ipotesi insufficienti o mal comprese e che, per questo motivo, non si raggiunga l'obiettivo. Allora si tratta di mostrare l'impossibilità di una soluzione con le ipotesi date o interpretate. Gli antichi ci hanno dato i primi esempi di dimostrazioni di impossibilità di questo tipo; hanno provato così che il rapporto tra l'ipotenusa e il cateto di un triangolo rettangolo isoscele è irrazionale. Nella Matematica moderna, la questione dell'impossibilità di trovare determinate soluzioni svolge un ruolo centrale; è da questo punto di vista, ovvero dimostrandone l'impossibilità, che problemi antichi e difficili, come la dimostrazione dell'assioma delle parallele, la quadratura del cerchio o la risoluzione per radicali delle equazioni di quinto grado hanno finalmente trovato soluzioni pienamente soddisfacenti e rigorose, sebbene in una direzione diversa da quella che originariamente ci si aspettava.

È probabilmente questo il fatto importante che insieme ad altre ragioni filosofiche fa nascere la convinzione (che ogni matematico condivide, ma che nessuno ha ancora avvalorato con una

[2] H. Minkowski: *Die Geometrie der Zahlen*. Teubner, Leipzig, 1896.

dimostrazione) che ogni problema matematico debba necessariamente avere una soluzione precisa, o sotto forma di una vera e propria risposta alla domanda posta, o con la dimostrazione dell'impossibilità della sua risoluzione e quindi il conseguente fallimento di tutti i tentativi. Prendiamo un problema irrisolto qualsiasi, come la questione dell'irrazionalità della costante C di Eulero-Mascheroni, o l'esistenza di un numero infinito di numeri primi della forma $2^n + 1$. Per quanto questi problemi ci possano sembrare inavvicinabili e per quanto noi risultiamo impotenti di fronte ad essi, abbiamo, comunque, la ferma convinzione che potremo risolverli con un numero finito di passaggi puramente logici.

Questo assioma della risolubilità di ogni problema è una caratteristica peculiare solo del pensiero matematico, o è una regola generale insita nella natura della mente, per la quale tutte le domande che ci poniamo devono avere una risposta? Perché anche in altre discipline scientifiche si incontrano vecchi problemi che sono stati risolti in modo molto soddisfacente e molto utile per la Scienza attraverso la dimostrazione della loro impossibilità. Ad esempio il problema del moto perpetuo. Dopo aver cercato invano di costruire una macchina del moto perpetuo, si scoprì che le relazioni che avrebbero dovuto sussistere tra le forze della natura se una tale macchina fosse esistita erano impossibili[3]; e il problema così trasformato ha portato alla scoperta della legge di conservazione dell'energia, che, a sua volta, ha spiegato l'impossibilità del moto perpetuo nella maniera originariamente pensata.

Questa convinzione della risolubilità di ogni problema matematico è per noi un grande incentivo durante il lavoro. Sentiamo risuonare dentro di noi un invito continuo: ecco il problema, cerca la soluzione. La puoi trovare con la sola ragione. Mai un matematico sarà ridotto a dire: "*Ignorabimus"*.

La riserva di problemi in matematica è inesauribile, e non appena un problema è risolto, numerosi altri si fanno avanti al suo posto.

Qui di seguito provo, a sostegno di quanto ho detto finora, a suggerire alcuni problemi, tratti da diversi settori della matematica, lo studio dei quali potrà concorrere al progresso della Scienza.

Diamo un'occhiata ai principi dell'Analisi e della Geometria. Le conquiste più suggestive e importanti del secolo scorso in questi campi sono, secondo me, la formulazione aritmetica del concetto del continuo nelle opere di Cauchy, Bolzano e Cantor, e la scoperta della Geometria non euclidea da parte di Gauss, Bolyai, Lobachevsky.

Quindi io attirerò la vostra attenzione in primo luogo su alcuni problemi che appartengono a questi campi.

1. Il problema di Cantor sulla potenza del continuo.[4]

Due sistemi, cioè due insiemi, di numeri reali ordinari (o di punti) sono, secondo Cantor, *equivalenti* o *della stessa potenza*, quando si può stabilire fra di essi un corrispondenza tale che a ciascun numero dell'uno corrisponda uno e un solo numero dell'altro. Le ricerche di Cantor su questi insiemi rendono molto probabile la validità di un teorema che fin qui, nonostante i più grandi sforzi, non è stato dimostrato. Questo teorema è il seguente: Ogni sistema di numeri reali in numero infinito, cioè ogni insieme infinito di numeri (o di punti), o è equivalente all'insieme di tutti i numeri interi naturali 1, 2, 3, … oppure è equivalente all'insieme di tutti i numeri reali, e di conseguenza al continuo, cioè ai punti di un segmento; *dal punto di vista dell'equivalenza, non ci sarebbero dunque che due insiemi di numeri: l'insieme numerabile e il continuo.*

Da questo teorema seguirebbe anche che il continuo rappresenterebbe la potenza immediatamente superiore alla potenza degli insiemi numerabili. La dimostrazione di questo teorema sarebbe allora come un nuovo ponte gettato fra gli insiemi numerabili e il continuo.

Cito ancora un'affermazione molto importante di Cantor, che ha un rapporto molto stretto con l'enunciato precedente e che ne potrebbe rappresentare la chiave della dimostrazione. Un sistema qualunque di numeri reali è detto *ordinato* quando di due numeri qualsiasi dell'insieme si è convenuto quale è il precedente e quale il seguente; di più, questa convenzione deve essere tale che, se un numero *a* precede un numero *b* e il numero *b* precede a sua volta un numero *c*, allora bisognerà guardare *a* come precedente *c*. L'ordine *naturale* dei numeri di un sistema è quello per il

[3] Cfr. Helmholtz, Ueber die Wechselwirkung der Natnrkräefte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittelungen der Physik. Vortrag gehalten Köigsberg, 1854.

[4] Riportiamo la descrizione data da Hilbert di questo primo problema; degli altri ci limitiamo a elencare i titoli.

quale si guarda a un numero piccolo come precedente un numero più grande che a sua volta sarà ritenuto come seguente il primo. C'è, come è facile vedere, un'infinità d'altre maniere per ordinare i numeri di un sistema.

Ora, se consideriamo un ordinamento in un sistema numerico e fra questi numeri consideriamo un sistema particolare di numeri, sistema che viene chiamato *sistema* o *insieme parziale*, anche questo insieme parziale risulta ordinato. Cantor considera un tipo particolare di insiemi ordinati che egli chiama insiemi *ben ordinati*; ciò che caratterizza questi insiemi è il fatto che, non solo nell'insieme stesso ma anche in tutti gli insiemi parziali, esiste un numero che precede tutti gli altri. L'insieme dei numeri interi 1, 2, 3, …, nel suo ordine naturale, è evidentemente un insieme ben ordinato. Invece, l'insieme dei numeri reali, cioè il continuo, nell'ordine naturale, non è un insieme ben ordinato. Infatti, consideriamo l'insieme parziale formato dai punti di un segmento senza il punto iniziale; è chiaro che questo insieme parziale non ha alcun elemento che precede tutti gli altri. Si presenta allora la domanda: l'insieme di tutti i numeri potrebbe essere ordinato in maniera tale che ogni insieme parziale abbia un elemento che precede tutti gli altri? Detto altrimenti, il continuo può essere concepito come insieme ben ordinato? A questa domanda, Cantor crede che la risposta possa essere affermativa. A me sembra assolutamente auspicabile *ottenere una dimostrazione diretta di questa importante affermazione di Cantor*, definendo per esempio un ordine dei numeri tale che in ogni insieme parziale si possa avere un numero che precede tutti gli altri.

2. Sulla non contraddittorietà degli assiomi dell'Aritmetica.
3. L'uguaglianza dei volumi di due tetraedri aventi la stessa base e la stessa altezza.
4. Problema della retta come cammino di lunghezza minima tra due punti.
5. Sulla nozione dei gruppi continui di trasformazioni di Lie senza l'ipotesi della differenziabilità delle funzioni che definiscono il gruppo.
6. Trattazione matematica degli assiomi della fisica.
7. Irrazionalità e trascendenza di alcuni numeri.
8. Problemi sui numeri primi.
9. Dimostrazione della più generale legge di reciprocità in un campo di numeri.
10. La risolubilità di un'equazione diofantea.
11. Forme quadratiche con numeri algebrici qualsiasi come coefficienti.
12. Estensione del teorema di Kronecker sui corpi abeliani a un dominio di razionalità algebrica qualsiasi.
13. Impossibilità della risoluzione dell'equazione generale di settimo grado attraverso funzioni di due soli argomenti.
14. Dimostrazione della finitezza di alcuni sistemi di funzioni.
15. Fondazione rigorosa della Geometria enumerativa di Schubert.
16. Problemi di topologia delle curve e delle superfici algebriche.
17. Rappresentazione come somme di quadrati di forme definite.
18. Tassellazione dello spazio mediante poliedri congruenti.
19. Le soluzioni dei problemi regolari del calcolo delle variazioni sono necessariamente analitiche?
20. Il problema di Dirichlet nel caso generale.
21. Dimostrazione dell'esistenza di equazioni differenziali lineari aventi un gruppo di monodromia assegnato.
22. Relazioni analitiche espresse in maniera uniforme attraverso funzioni automorfe.
23. Ulteriori sviluppi dei metodi del Calcolo delle variazioni.

I problemi citati sono semplicemente degli esempi, ma sono già sufficienti per mostrare quanto sia ricca, varia ed estesa la Matematica di oggi, e ci portano a domandarci se la Matematica abbia in sorte il destino di quelle discipline che si sono divise in rami separati, i cui rappresentanti si comprendono appena tra di loro e i cui legami diventano sempre più deboli. Non lo credo né me lo auguro. La Matematica è, secondo me, un tutto indivisibile, un organismo la cui vitalità è condizionata dalla connessione tra le sue parti. In realtà, quale che sia la diversità delle conoscenze matematiche nei vari dettagli, abbiamo ancora una chiara coscienza della similitudine del processo logico, del legame tra le idee matematiche così come delle numerose analogie tra le diverse parti di questa Scienza. Notiamo anche che, più una teoria matematica si sviluppa, più la sua esposizione guadagna in armonia e unità e più vengono scoperti legami insospettabili fra di essa e branche della Scienza che prima le erano lontane. Così succede che, con l'estensione della Matematica, il suo aspetto organico non si perde ma, anzi, si manifesta sempre più chiaramente.

Ma - noi ci chiediamo - con questa estensione della conoscenza matematica, per il singolo ricercatore non diventerà alla fine impossibile abbracciare tutti i settori di questa Scienza? Come risposta, mi limito a osservare quanto profondamente si sia radicato nelle Scienze Matematiche il fatto che ogni sviluppo vada di pari passo con l'invenzione di strumenti più rigorosi e di metodi più semplici che, mentre aiutano a comprendere le teorie più antiche e ad abbandonare sviluppi diventati inutili, permettono di orientarsi nelle branche della Matematica più facilmente che in qualsiasi altra Scienza.

Il carattere di unità della Matematica è l'essenza stessa di questa Scienza. La Matematica è il fondamento di tutte le conoscenze esatte dei fenomeni naturali. Affinché possiamo raggiungere questo grande obiettivo, possa il nuovo secolo portare in dono alla Matematica maestri geniali e discepoli entusiasti e determinati!